講義ノート
代表的ランダム性

樋口幸治郎

概要

アルゴリズム的情報理論において, ランダム性を定義するのに三つの主要な方法がある. テストによる方法, 複雑性による方法, マルチンゲールによる方法がそれである. これらによるランダム性の定義は, どれもある特別な零集合に含まれないこと, として見ることができる. 本稿では, 第一の方法によって Martin-Löf ランダム性と Schnorr ランダム性を定め, 第二の方法によって Chaitin ランダムを定め, 第三の方法によって計算可能ランダム性を定める. 本稿は, これらのランダム性に関して以下の内容を含む. Martin-Löf ランダム性と Schnorr ランダム性を, 複雑性やマルチンゲールを用いて特徴づける. これらの特徴付けによって, Schnorr ランダム性は Martin-Löf ランダム性の定義や特徴付けに, 測度の計算可能性の条件を付加したものであることが分かる. また, これらの特徴付けの一つとして, Martin-Löf ランダム性と Chaitin ランダム性が一致することを示す. さらに, Martin-Löf ランダム性は計算可能ランダム性を導き, 計算可能ランダム性は Schnorr ランダム性を導くことを示す. また, 万能なテスト・複雑性・マルチンゲールの存在が議論される.

1 準備

1.1 カントール空間

ω で（0 を含む）自然数全体の集合を表す. $2^{<\omega}$ で有限二進列全体の集合, 2^ω で無限二進列全体の集合を表す. 空列と空集合はどちらも $\emptyset$ で表す. $\sigma, \sigma' \in 2^{<\omega}$ と $\tau \in 2^{<\omega} \cup 2^\omega$ と自然数 n に対して, $\sigma\tau$ で, σ の後に τ を繋げてできる二進列を表す. σ^n で, σ を n 回繋げてできる有限二進列を表す. ただし, $n = 0$ のときは空列を表す. $\sigma \preceq \tau$ で, ある $\rho \in 2^{<\omega} \cup 2^\omega$ が存在して $\sigma\rho = \tau$ であることを表す. さらに, $\sigma \neq \tau$ のときは, $\sigma \prec \tau$, 或いは, $\sigma \precneqq \tau$ と書く. $\sigma \preceq \sigma'$ か $\sigma' \preceq \sigma$ のとき, σ と σ' は <u>比較可能</u> であると言う. そうでないとき, <u>比較不可能</u> であると言う. $[\![\sigma]\!]$ で 2^ω の部分集合 $\{\alpha \in 2^\omega : \sigma \prec \alpha\}$ を表す. $|\tau|$ で τ の長さを表す. ただし, $\tau \in 2^\omega$ のときは $|\tau| = \infty$ とする. $m \leq |\tau|$ に対して, τ_m で τ

の m 番目の値を表し, $\tau \upharpoonright m$ で, τ の始切片で長さが m である二進列を表す. $i \in \{0,1\}$ は, しばしば長さ 1 の有限二進列でその唯一の値が i であるような有限二進列と同一視する.

2^ω は $\{[\![\sigma]\!] : \sigma \in 2^{<\omega}\}$ を開基とする位相と同一視され, その位相空間を カントール空間 と呼ぶ. $A \subset 2^{<\omega}$ に対して, $[\![A]\!]$ で $\bigcup_{\sigma\in A}[\![\sigma]\!]$ を表す. $[\![A]\!]$ はカントール空間の開集合であり, $[\![A]\!]$ を A で生成される開集合 と呼ぶ. 逆に, カントール空間上の開集合 O に対して, ある $A \subset 2^{<\omega}$ が存在して, $O = [\![A]\!]$ が成り立つ. $A \subset 2^{<\omega}$ は, 任意の異なる二つの A の要素が比較可能ではないとき, 反鎖 である, 或いは, prefix-free であると言う. カントール空間上の開集合 O に対して, それを生成する $2^{<\omega}$ の部分集合を B とする. $C = \{\sigma \in B : (\forall \tau \prec \sigma)[\tau \notin B]\}$ と定めれば, これは反鎖かつ $[\![B]\!] = [\![C]\!]$ である. 従って, カントール空間の任意の開集合は $2^{<\omega}$ のある反鎖部分集合によって生成される.

任意の $\sigma \in 2^{<\omega}$ に対して, $\lambda([\![\sigma]\!]) = 2^{-|\sigma|}$ で定まる 2^ω 上の測度 λ を (fair-coin) 測度 と言う. $\lambda(2^\omega) = 1$ が成り立つ. また, 任意の反鎖集合 $A \subset 2^{<\omega}$ に対して, $\lambda([\![A]\!]) = \sum_{\sigma\in A} 2^{-|\sigma|}$ が成り立つ. 従って, $\sum_{\sigma\in A} 2^{-|\sigma|} \leq 1$ が成り立つ. これを Kraft の不等式 と呼ぶ. $N \subset 2^\omega$ が 零集合 であるとは, $\lambda(N) = 0$ のことを言う. これは, 任意の $n \in \omega$ に対して, ある開集合 O が存在して, $N \subset O$ かつ $\lambda(O) \leq n^{-1}$ が成り立つことと同値である.

1.2 計算可能性理論

このノートでは, 計算可能性理論の基本知識を前提とする.

適切に自然数にコード化することによって, $2^{<\omega}$ を自然数の計算可能な部分集合と見なすことができ, $2^{<\omega}$ 上でも計算可能な集合や関数, 或いは, c.e. 集合（計算的枚挙可能集合, 再帰的枚挙可能集合, 或いは, r.e. 集合とも言う）を考えることができる. また, 前節で定めた有限二進列についての関数や関係は計算可能としてよい. カントール空間上の開集合 O が c.e. であるとは, O を生成するある c.e. 集合 $A \subset 2^{<\omega}$ が存在することを言う. このとき, c.e. 集合 A のインデックス（つまり, A を生成するプログラムの Gödel 数）を O のインデックス と呼ぶ. 一般にインデックスは, 存在すれば無数にある.

f が X から Y への 部分関数 とは, $\mathrm{dom}(f) \subset X$ で, かつ, $\mathrm{rng}(f) \subset Y$ であることを言う. ここで, $\mathrm{dom}(f)$ で f の定義域を $\mathrm{rng}(f)$ で f の値域を表す. $X = Y$ のときは, f を X 上の部分関数 と言う. f を X から Y への計算可能部分関数とする. 任意の $s \in \omega$ と $x \in X$ に対して, $f_s(x)$ で計算可能部分関数 f に x を入力し, s ステップだけ計算したときの出力（あれば）を表す. 同様に, c.e. 集合 $A \subset X$ についても, $x \in A_s$ で s ステップの計算で $x \in A$ であることが成り立つことを表す. A_s は有限集合であり, s（と A のイン

デックス）について一様に計算可能な集合となる．

定理 1. *c.e.* 開集合のインデックスから, 同じ *c.e.* 開集合を生成する計算可能反鎖集合のインデックスを与える計算手続きがある．

Proof. $A \subset 2^{<\omega}$ を c.e. 集合とする．$\varphi(\sigma) \equiv (\exists \tau \preceq \sigma)[\tau \in A_{|\sigma|}]$ と定める．$\sigma \in B$ を, $\varphi(\sigma)$ かつ $(\forall \sigma' \prec \sigma) \neg \varphi(\sigma')$ と定めれば, この B が求める計算可能反鎖集合である． □

$f : \omega \to \mathbb{Q}$ が <u>(強い意味で）計算可能</u> であるとは, ある計算可能関数 $F : \omega \to \omega \times \omega \times \omega$ が存在して, 任意の $m \in \omega$ に対して, $F(m) = (a, b, c)$ とすれば, $a = 0$ なら $f(m) = b/c$ が成り立ち, $a \neq 0$ なら $f(m) = -b/c$ が成り立つことを言う．$r \in \mathbb{R}$ が <u>計算可能</u> であるとは, ある計算可能な関数 $f : \omega \to \mathbb{Q}$ が存在して, 任意の $n \in \omega$ に対して, $f(n) - n^{-1} \leq r \leq f(n) + n^{-1}$ を満たすことを言う． このとき, 計算可能関数 f のインデックスを <u>r のインデックス</u> と言う． $g : \omega \to \mathbb{R}$ が <u>計算可能</u> であるとは, ある計算可能関数 $G : \omega \times \omega \to \mathbb{Q}$ が存在して, 任意の $m, n \in \omega$ に対して, $G(m, n) - n^{-1} \leq g(m) \leq G(m, n) + n^{-1}$ を満たすことを言う． このとき, $m \in \omega$ と $p, q \in \mathbb{Q}$ に対して, $g(m) > p$ や $g(m) < q$ は m と p, q に関する c.e. な関係（換言すれば, $\{(m, p) \in \omega \times \mathbb{Q} : g(m) > p\}$ 等は c.e. 集合）である．g の像が偶々 $\mathbb{Q}$ や ω の部分集合になるときは, g は <u>$\mathbb{Q}$ への（或いは, ω への）弱い意味での関数</u> と言う．

c.e. 開集合 O に対して, 定理 1 より O を生成する計算可能反鎖集合 A がある．このとき, $\lambda(O) = \lim_{s \to \infty} [\![A_s]\!]$ が成り立つから, 次の定理が成立する．

定理 2. 計算可能な測度を持つ *c.e.* 開集合 O について, 任意の $m \in \omega$ とその測度, 及び, *c.e.* 開集合のインデックスから, $\lambda(O \setminus [\![F]\!]) \leq m^{-1}$ を満たす有限集合 $F \subset 2^{<\omega}$ のインデックスを与える計算手続きが存在する． □

インデックスを持つオブジェクトの列 $\{\mathcal{O}_n\}_{n \in \omega}$ が <u>計算可能</u> であるとは, ある計算可能な関数 $f : \omega \to \omega$ が存在して, 任意の $n \in \omega$ に対して, $f(n)$ が $\mathcal{O}_n$ のインデックスであるときを言う．任意の $n \in \omega$ に対して, インデックスを持つオブジェクト O_n が <u>n について一様に計算可能</u> であるとは, $\{O_n\}_{n \in \omega}$ が計算可能な列であることを言う．

2 テストによるアプローチ

定義 3 (テスト)**.** $\{T_n\}_{n \in \omega}$ をカントール空間上の開集合の減少列とする． $\{T_n\}_{n \in \omega}$ が <u>テスト</u> であるとは, $\bigcap_{n \in \omega} T_n$ が零集合であることを言う． このとき, $\bigcap_{n \in \omega} T_n$ を

テスト $\{T_n\}_{n\in\omega}$ による零集合 と呼ぶ．無限二進列があるテストに 合格する とは，そのテストによる零集合の要素とならないことを言う．

次が成立することは定義から自明である．

定理 4. 2^ω 上の任意の零集合は，あるテストによる零集合の部分集合になる． □

定義 5 ($\mathcal{T}$ ランダム性)**.** $\mathcal{T}$ をテストの集合とする．無限二進列が $\mathcal{T}$ ランダム であるとは，$\mathcal{T}$ に含まれる任意のテストに合格することを言う．

定義 6 (Martin-Löf ランダム性)**.** テスト $\{T_n\}_{n\in\omega}$ が *Martin-Löf* テスト であるとは，$\{T_n\}_{n\in\omega}$ は *c.e.* 開集合の計算可能列で，かつ，計算可能関数 $f:\omega\to\omega$ が存在して，任意の $m\in\omega$ に対し $\lambda(T_{f(n)})\leq m^{-1}$ を満たすことを言う．$\mathcal{T}_{\mathrm{ML}}$ を *Martin-Löf* テスト全体の集合とする．$\mathcal{T}_{\mathrm{ML}}$ ランダム性は，*Martin-Löf* ランダム性 とも呼ばれる．

演習 * **7.** *[1] 任意の *Martin-Löf* テストに対し，ある *Martin-Löf* テスト $\{T_n\}_{n\in\omega}$ が存在して，これらのテストによる零集合は一致し，任意の $n\in\omega$ に対し，$\lambda(T_n)\leq 2^{-n}$ が成り立つ．

定義 8 (Schnorr ランダム性)**.** テスト $\{T_n\}_{n\in\omega}$ が *Schnorr* テスト であるとは，*Martin-Löf* テストであって，かつ，ω から $\mathbb{R}$ への関数 $n\mapsto\lambda(T_n)$ が計算可能であることを言う．$\mathcal{T}_{\mathrm{S}}$ を *Schnorr* テスト全体の集合とする．$\mathcal{T}_{\mathrm{S}}$ ランダム性は，*Schnorr* ランダム性 とも呼ばれる．

演習 9. 任意の *Schnorr* テスト $\{T_n\}_{n\in\omega}$ に対し，ある *Schnorr* テスト $\{T'_n\}_{n\in\omega}$ が存在して，$\bigcap_{n\in\omega}T_n\subset\bigcap_{n\in\omega}T'_n$ が成り立ち，かつ，任意の $n\in\omega$ に対して $\lambda(T'_n)=2^{-n}$ が成り立つ．

定義 10 (万能 $\mathcal{T}$ テスト)**.** $\mathcal{T}$ をテストの集合とする．$\mathcal{T}$ のテストが 万能 であるとは，そのテストの零集合は，どんな $\mathcal{T}$ の要素による零集合をも覆うことを言う．

第 3 章で万能 Martin-Löf テストの存在を，第 4 章で万能 Schnorr テストの非存在を示す．

[1] 「演習」の右肩に「」が付いているものは，後に事実として証明なしに使われる．

3　複雑性によるアプローチ

定義 11 (接頭機械)**.** $2^{<\omega}$ 上の部分関数 P が 接頭 であるとは, $\mathrm{dom}(P)$ が反鎖であることを言う.

定義 12 (複雑性)**.** $K : 2^{<\omega} \to \omega \cup \{\infty\}$ が (*Kolmogorov*) 複雑性 であるとは, ある接頭関数 P が存在して, $\sigma \in 2^{<\omega}$ に対し, $K(\sigma) = \min(\{|\tau| : \tau \in P^{-1}\} \cup \{\infty\})$ となることを言う. このとき, K を K_P と書き, この K_P を P による複雑性 と呼ぶ.

定理 13. 任意の接頭関数 P と $n \in \omega$ に対して,

$$\lambda(\{\alpha \in 2^\omega : (\exists m)[K_P(\alpha \upharpoonright m) \leq m - n]\}) \leq 2^{-n}$$

が成り立つ.

Proof. $A = \{\sigma \in 2^{<\omega} : K_P(\sigma) \leq |\sigma| - n$ かつ $(\forall \tau \prec \sigma)[K_P(\tau) > |\tau| - n]\}$ と定める. 定義より, A は反鎖で, かつ, $[\![A]\!] = \{\alpha \in 2^\omega : (\exists m)[K_P(\alpha \upharpoonright m) \leq m - n]\}$ が成り立つ. $\sigma \in A$ に対し, $|\tau_\sigma| = K_P(\sigma)$ を満たす $\tau_\sigma \in P^{-1}(\sigma)$ を対応させる. この対応は単射である. したがって,

$$\lambda([\![A]\!])2^n = \sum_{\sigma \in A} 2^{-|\sigma|+n} \leq \sum_{\sigma \in A} 2^{-K_P(\sigma)} = \sum_{\sigma \in A} 2^{-|\tau_\sigma|} \leq \lambda([\![\mathrm{dom}(P)]\!]) \leq 1$$

を得る. 両辺を 2^n で割れば, 求める不等式が得られる. □

演習 * 14. 任意の $n \in \omega$ に対し, ある $m \in \omega$ が存在し, $K(\alpha \upharpoonright m) \leq m - n$ であることと, $\limsup_{m\to\infty}(m - K(\alpha \upharpoonright m)) = \infty$ であることとは同値である.

系 15. 任意の複雑性 K に対して, $\{\alpha \in 2^\omega : \limsup_{m\to\infty}(m - K(\alpha \upharpoonright m)) = \infty\}$ は零集合である. □

定義 16 (P による零集合)**.** 接頭関数 P に対して, 無限二進列 α が P で圧縮不可能 であるとは, $\limsup_{m\to\infty}(m - K(\alpha \upharpoonright m)) = \infty$ が成り立つことを言う. P で圧縮不可能な無限二進列全体の零集合を P による零集合, 或いは, K_P による零集合 と呼ぶ.

演習 17. $A \subset 2^{<\omega} \times \omega$ は, $\sum_{(\sigma,n)\in A} 2^{-n} \leq 1$ を成り立たせるとする. このとき, ある接頭関数 P が存在して, 任意の $(\sigma, n) \in A$ に対して, 長さ n のある有限二進列 τ が存在して, $P(\tau) = \sigma$ が成り立つ.

演習 18. どんな零集合もある複雑性による零集合で覆われる．

定義 19 ($\mathcal{K}$ ランダム性)**.** $\mathcal{K}$ を複雑性の集合とする．無限列 α が $\mathcal{K}$ ランダム であるとは，どんな $\mathcal{K}$ の要素による零集合にも属さないことを言う．（換言すれば，任意の $K \in \mathcal{K}$ に対し，ある自然数 $c \in \omega$ が存在して，任意の $n \in \omega$ に対し，$K(\alpha \restriction n) \geq n - c$ を満たすことを言う．）

定義 20 (機械)**.** $2^{<\omega}$ 上の計算可能な部分関数を 機械 と呼ぶ．

定義 21 (Chaitin ランダム性)**.** $\mathcal{K}_C$ を接頭機械による複雑性全体の集合とする．$\mathcal{K}_C$ ランダム性は，*Chaitin* ランダム性 とも呼ばれる．

定理 22. どんな接頭機械による零集合もある *Martin-Löf* テストによる零集合で覆われる．

Proof. P を接頭機械とする．定理 13 より，任意の $n \in \omega$ に対して，$\lambda(\{\alpha \in 2^\omega : (\exists m)[K_P(\alpha \restriction m) \leq m - n]\}) \leq 2^{-n}$ が成り立つ．各 $n \in \omega$ に対して，$A_n \subset 2^{<\omega}$ を，

$$A_n = \{\sigma \in 2^{<\omega} : (\exists \tau)[P(\tau) = \sigma \text{かつ} \ |\tau| \leq |\sigma| - n]\}$$

と定めれば，$\{A_n\}_{n\in\omega}$ は c.e. 集合の計算可能列であり，かつ，$[\![A_n]\!] = \{\alpha \in 2^\omega : (\exists m)[K_P(\alpha \restriction m) \leq m - n]\}$ が成り立つ．よって，$\{[\![A_n]\!]\}_{n\in\omega}$ は，Martin-Löf テストであり，かつ，その零集合は P による零集合を覆う． □

補題 23 (Kraft-Chaitin の定理)**.** $\sum_{(\sigma,n)\in A} 2^{-n} \leq 1$ を満たす任意の *c.e.* 集合 $A \subset 2^{<\omega} \times \omega$ に対し，ある接頭機械 P が存在して，$\sum_{\tau\in\mathrm{dom}(P)} 2^{-|\tau|} = \sum_{(\sigma,n)\in A} 2^{-n}$，かつ，任意の $(\sigma, n) \in A$ に対して，長さ n のある有限二進列 τ が存在して $P(\tau) = \sigma$ が成り立つ．

Proof. A が無限集合のときのみ証明する．（有限集合のときも同様にして示せる．）$i \mapsto (\sigma_i, n_i)$ を ω から A への計算可能な全単射とする．接頭機械 P のグラフ $\mathcal{G}_P = \{(\tau_i, \sigma_i) : i \in \omega\}$ を次のように再帰的に定める．

$B_0 = \{\emptyset\}$, $k_0 = 0$ と定める．今，B_m と互いに比較不可能な有限二進列 $\{\tau_i\}_{i<m}$ が定まったとして，B_{m+1} と τ_m を定めたい．帰納法の仮定として，B_m は任意の異なる二元が比較不可能かつ異なる長さを持つような有限二進列の有限集合とし，$\{\tau_i\}_{i<m}$ は任意の異なる二成分は比較不可能かつ各 $i < m$ に対し $|\tau_i| = n_i$ を満たすとし，任意の B_m の元と $\{\tau_i\}_{i<m}$ の元は比較不可能であり，$[\![B_m \cup \{\tau_i : i < m\}]\!] = 2^\omega$ としてよい．帰納法の仮定，及び，A についての仮定より，ある $\rho \in B_m$ が存在し，$\rho \leq n_m$ でなければならない．なぜ

なら, そうでないとすると, $\sum_{\rho\in B_m} 2^{-|\rho|} < 2^{-n_m}$ であるから,

$$1 = \sum_{\rho\in B_m} 2^{-|\rho|} + \sum_{i<m} 2^{-|\tau|} < 2^{-n_m} + \sum_{i<m} 2^{-n_i} < \sum_{i\in\omega} 2^{-n_i} \leq 1$$

となり矛盾する. ρ_0 を $|\rho| \leq n_m$ を満たす $\rho \in B_m$ のうちの長さが最大の有限二進列とする. $a = n_m - |\rho_0|$ と置く. $\tau_m = \rho_0 1^a$, $B_{m+1} = (B_m \setminus \{\rho_0\}) \cup \{\rho_0 1^i 0 : i < a\}$ と定める. 定め方から, 帰納法の仮定としていた条件を B_{m+1} と $\{\tau_i\}_{i<m+1}$ は保っている.

以上で P が定まった. $\mathrm{dom}(P) = \{\tau_i : i \in \omega\}$ で, かつ, $|\tau| = n_i$ であるから, $\sum_{\tau\in\mathrm{dom}(P)} 2^{-|\tau|} = \sum_{(\sigma,n)\in A} 2^{-n}$ が成り立つ. 他の性質は, P の定め方から, その成立は明らかである. □

定理 24. どんな *Martin-Löf* テストによる零集合もある接頭機械による零集合で覆われる.

Proof. $\{T_n\}_{n\in\omega}$ を Martin-Löf テストとする. 必要であれば適切に部分列を取ることで, 任意の $n \in \omega$ について $\lambda(T_n) \leq 2^{-2n-1}$ を仮定してよい. $\{A_n\}_{n\in\omega}$ を $2^{<\omega}$ の反鎖 c.e. 部分集合の計算可能な列で, 任意の $n \in \omega$ に対し $T_n = [\![A_n]\!]$ を満たすものとする. このとき, $\sum_{\sigma\in A_n} 2^{-|\sigma|} = \lambda(T_n) \leq 2^{-2n-1}$ が成り立つ. c.e. 集合 $A \subset 2^{<\omega} \times \omega$ を, $A = \{(\sigma, |\sigma| - n) : \sigma \in A_n\}$ で定める. このとき,

$$\sum_{(\sigma,|\sigma|-n)\in A} 2^{-|\sigma|+n} = \sum_{n\in\omega} \sum_{\sigma\in A_n} 2^{-|\sigma|+n} \leq \sum_{n\in\omega} 2^{-2n-1} 2^n = 1$$

が得られる. よって, Kraft-Chaitin の定理より, 接頭機械 P が存在して, 任意の $n \in \omega$ と $\sigma \in A_n$ に対して, 長さ $|\sigma| - n$ の有限二進列 τ が存在して $P(\tau) = \sigma$ が成り立つ. $\alpha \in \bigcap_{n\in\omega} T_n$ であれば, 任意の $n \in \omega$ に対し, ある $\sigma \in A_n$ が存在して $\sigma \prec \alpha$ である. P の取り方から, $K_P(\sigma) \leq |\sigma| - n$ が成立する. $n \in \omega$ は任意だったので, α は K_P による零集合の要素になる. □

系 25. *Chaitin* ランダム性と *Martin-Löf* ランダム性は一致する. □

定義 26 (計算可能測度接頭機械)**.** 接頭機械 P が <u>計算可能測度接頭機械</u> であるとは, $\lambda([\![\mathrm{dom}(P)]\!])$ が計算可能であることを言う.

演習 27. 任意の計算可能測度接頭機械 P に対して, ある接頭機械 P' が存在して, $\lambda([\![\mathrm{dom}(P)]\!]) = 2^{-1}$ であり, かつ, 任意の $\sigma \in 2^{<\omega}$ に対して, $K_{P'}(\sigma) \leq K_P(\sigma) + 1$ が成り立つ.

定理 28. どんな計算可能測度接頭機械による零集合もある *Schnorr* テストによる零集合で覆われる．

Proof. P を計算可能測度接頭機械とする．各 $n \in \omega$ に対して, $A_n \subset 2^{<\omega}$ を,

$$A_n = \{\sigma \in 2^{<\omega} : (\exists \tau)[P(\tau) = \sigma \text{かつ} |\tau| \leq |\sigma| - n]\}$$

と定める．定理 22 と同様にして, $\{[\![A_n]\!]\}_{n\in\omega}$ は, Martin-Löf テストであり, かつ, その零集合は P による零集合を覆うことが分かる．よって, $\{[\![A_n]\!]\}_{n\in\omega}$ が Schnorr テストであることを示すには, あと, $n \mapsto \lambda([\![A_n]\!])$ が計算可能であることのみ示せばよい．$\lambda(P)$ は計算可能なので, ω 上の計算可能関数 $m \to s_m$ で, $\lambda(P) - \lambda(P_{s_m}) \leq 2^{-m}$ を満たすものが存在する．今, $A_{n,s} \subset A_n$ を

$$A_{n,s} = \{\sigma \in 2^{<\omega} : (\exists \tau)[P_s(\tau) = \sigma \text{かつ} |\tau| \leq |\sigma| - n]\}$$

と定める．すると, $\lambda([\![A_{n,s}]\!])$ は n, s について一様に計算可能である．さらに, 任意の $n, m \in \omega$ に対して, 不等式

$$\lambda([\![A_n]\!]) - \lambda([\![A_{n,s_m}]\!]) \leq \sum_{\sigma \in A_n \setminus A_{n,s_m}} 2^{-|\sigma|} \leq \sum_{\tau \in \mathrm{dom}(P) \setminus \mathrm{dom}(P_{s_m})} 2^{-|\tau|-n} \leq 2^{-m-n}$$

が成り立つから, $\lambda([\![A_n]\!])$ は n について一様に計算可能であることが分かる． □

定理 29. どんな *Schnorr* テストによる零集合もある計算可能測度接頭機械による零集合で覆われる．

Proof. 証明は定理 24 と全く同じである．定理 24 における接頭機械 P は, Kraft-Chaitin の定理により得られたから, $\sum_{\tau \in \mathrm{dom}(P)} 2^{-|\tau|} = \sum_{n\in\omega}(\lambda(T_n)2^{-n})$ が成り立っている．Schnorr テストであれば, $\lambda([\![\mathrm{dom}(P)]\!]) = \sum_{n\in\omega}(\lambda(T_n)2^{-n})$ は計算可能であるから, $\mathrm{dom}(P)$ は計算可能な測度を持つ． □

系 30. 計算可能測度接頭機械による複雑性全体の集合を $\mathcal{K}_{\mathrm{S}}$ で表す．このとき, $\mathcal{K}_{\mathrm{S}}$ ランダム性は *Schnorr* ランダム性と一致する． □

演習 31. $\lambda([\![\mathrm{dom}(P)]\!]) = 2^{-1}$ を満たす接頭機械 P による複雑性全体の集合を $\mathcal{K}'_{\mathrm{S}}$ で表す．このとき, $\mathcal{K}'_{\mathrm{S}}$ ランダム性は *Schnorr* ランダム性と一致する．

定義 32 (万能 K 複雑性)**.** $\mathcal{K}$ を複雑性の集合とする．複雑性 $K \in \mathcal{K}$ が 万能 $\mathcal{K}$ 複雑性 であるとは, $\mathcal{K}$ のどんな要素による零集合も, K による零集合に覆われることを言う．

定義 33 (最適 K 複雑性)**.** $\mathcal{K}$ を複雑性の集合とする．複雑性 $K \in \mathcal{K}$ が <u>最適 $\mathcal{K}$ 複雑性</u> であるとは, 任意の $K' \in \mathcal{K}$ に対して, ある $n \in \omega$ が存在し, 任意の $\sigma \in 2^{<\omega}$ に対して, $K(\sigma) \leq K'(\sigma) + n$ が成り立つことを言う．

演習 * 34. $\mathcal{K}$ を複雑性の集合とする．最適 $\mathcal{K}$ 複雑性は万能 $\mathcal{K}$ 複雑性である．

定理 35 (最適 $\mathcal{K}_C$ 複雑性の存在)**.** 最適 $\mathcal{K}_C$ 複雑性は存在する．

Proof. 計算可能な列 $\{f_n\}_{n\in\omega}$ を, 各 $n \in \omega$ について f_n は $2^{<\omega}$ 上の計算可能な部分関数であり, かつ, 全ての $2^{<\omega}$ 上の計算可能な部分関数はこの列に現れているものとする．接頭機械の計算可能な列 $\{f'_n\}_{n\in\omega}$ を次のように定める．$n \in \omega$ と $\sigma \in 2^{<\omega}$ に対し, $f_s(\sigma)$ が定義されるような s を探す．もしあれば, そのような最小の s_0 を選び, $\mathrm{dom}(f_{s_0})$ が反鎖集合か否かを判定する．もし成り立てば, $f'_n(\sigma) = f_n(\sigma)$ とする．$\{f'_n\}_{n\in\omega}$ の定め方から, 任意の $n \in \omega$ に対して, f_n は接頭機械である．したがって, P を $P(1^n0\sigma) = f'_n(\sigma)$ と定めれば, これも接頭機械となっている．

P による複雑性 K_P が最適であることを見るために, 任意に接頭機械 P' を固定する．このとき, ある $n \in \omega$ が存在して, $f_n = P'$ であり, $\mathrm{dom}(P')$ は反鎖だから, $f'_n = P'$ である．したがって, 任意の $\sigma \in 2^{<\omega}$ に対して, $P(1^n0\sigma) = P'(\sigma)$ が成り立つ．故に, 任意の $\tau \in 2^{<\omega}$ について $K_P(\tau) \leq K_{P'}(\tau) + n + 1$ が成り立つ． □

系 36. 万能 $\mathcal{K}_C$ 複雑性は存在する．また, 万能 *Martin-Löf* テストは存在する． □

次の章で, 万能 Schnorr テストや万能 $\mathcal{K}_S$ 複雑性の非存在を証明する．

4 マルチンゲールによるアプローチ

定義 37 (マルチンゲール)**.** $M : 2^{<\omega} \to \{r \in \mathbb{R} : r \geq 0\}$ が <u>マルチンゲール</u> であるとは, $2M(\sigma) = M(\sigma0) + M(\sigma1)$ を満たすことを言う．マルチンゲール M が無限二進列 α 上で <u>勝つ</u>, 或いは, <u>成功する</u> とは, $\limsup_{n\to\infty} M(\alpha \upharpoonright n) = \infty$ であることを言う．M がその上で勝てる無限二進列全体を <u>$\mathrm{Win}(M)$</u> と書く．

演習 * 38. 任意のマルチンゲール M と $\sigma \in 2^{<\omega}$ と $n \in \omega$ に対し, $M(\sigma) \leq 2^{|\sigma|}M(\emptyset)$, 及び, $\sum\{M(\tau) : \tau \in 2^{<\omega}$ かつ $|\tau| = n\} = 2^n M(\emptyset)$ が成り立つ．

定理 39. 任意のマルチンゲール M と正の実数 r に対して, 不等式

$$\lambda(\{\alpha \in 2^\omega : (\exists n)[M(\alpha \upharpoonright n) \geq r]\}) \leq r^{-1}M(\emptyset)$$

が成立する.

Proof. 任意の $m \in \omega$ に対して, U_m を $M(\sigma) \geq r$ を満たす長さ m 以下の有限二進列 σ のうち, どんな $\tau \prec \sigma$ も $M(\tau) \geq r$ を満たさないものを全て集めた集合とする. 任意の $m \in \omega$ と $\sigma \in U_m$ に対して, マルチンゲールの定義から,

$$\sum\{M(\tau) : \tau \in 2^{<\omega} \text{かつ } |\tau| = m\} = 2^m M(\emptyset) \tag{1}$$

や

$$\sum\{M(\tau) : \tau \in 2^{<\omega} \text{かつ } |\tau| = m \text{ かつ} \sigma \preceq \tau\} = 2^{m-|\sigma|} M(\sigma) \tag{2}$$

が成り立つ. さらに, $\sigma \in U_m$ に関する (2) の総和は (1) の値以下であり, $\sigma \in U_m$ なら $M(\sigma) \geq r$ であることから,

$$\sum_{\sigma \in U_m} 2^{m-|\sigma|} r < \sum_{\sigma \in U_m} 2^{m-|\sigma|} M(\sigma) \leq 2^m M(\emptyset)$$

を得る. よって, $2^m r$ で割ることにより, $\sum_{\sigma \in U_m} 2^{-|\sigma|} \leq r^{-1} M(\emptyset)$ が得られる. $m \to \infty$ とすれば, $\lambda(\{\alpha \in 2^\omega : (\exists n)[M(\alpha \restriction n) \geq r)]\}) \leq r^{-1} M(\emptyset)$ が分かる. □

系 40. 任意のマルチンゲール M に対して, $\mathrm{Win}(M)$ は零集合である. □

定義 41 (M による零集合)**.** 任意のマルチンゲール M に対し, $\mathrm{Win}(M)$ を <u>M による零集合</u> と呼ぶ.

補題 42. $\{M_n\}_{n \in \omega}$ をマルチンゲールの列とする. もし $\sum_{n \in \omega} M_n(\emptyset)$ が有限ならば, $M(\sigma) = \sum_{n \in \omega} M_n(\sigma)$ で定まる M もマルチンゲールである.

Proof. 任意の $\sigma \in 2^{<\omega}$ に対して, $M_n(\sigma) \leq M_n(\emptyset) 2^{|\sigma|}$ に注意すれば,

$$M(\sigma) \leq \sum_{n \in \omega} M_n(\sigma) \leq \sum_{n \in \omega} M_n(\emptyset) 2^{|\sigma|} = 2^{|\sigma|} \sum_{n \in \omega} M_n(\emptyset)$$

が得られ, この最左辺は実数値を取るから, $M(\sigma)$ も実数に値を持つ. これにより, M がマルチンゲールになることは, 各 M_n がマルチンゲールであることから明らかであろう. □

定理 43. 任意の零集合 N に対して, あるマルチンゲール M が存在して, $N \subset \mathrm{Win}(M)$ が成り立つ.

Proof. テスト $\{T_n\}_{n \in \omega}$ を, $N \subset \bigcap_{n \in \omega} T_n$ であり, かつ, $\lambda(T_n) \leq 2^{-n}$ を満たすとする. M_n を $M_n(\sigma) = \lambda(\{\alpha \in T_n : \sigma \preceq \alpha\}) 2^{|\sigma|}$ と定めると, これはマルチンゲールであり, か

つ, $M_n(\emptyset) \leq 2^{-n}$ が成り立つ．よって, 補題 42 より, $M(\sigma) = \sum_{n\in\omega} M_n(\sigma)$ で定まる M はマルチンゲールである．

$N \subset \mathrm{Win}(M)$ を見るために, $\alpha \in N$ を固定する．任意の $n \in \omega$ に対して, $\alpha \in T_n$ より, ある $\sigma_n \in 2^{<\omega}$ が存在して, $\sigma_n \prec \alpha$ であり, かつ, $[\![\sigma_n]\!] \subset T_n$ が成り立つ．M_n の定め方から, 任意の $\tau \succeq \sigma_n$ に対して, $M_n(\tau) = 1$ である．このことから, $\limsup_{m\to\infty} M(\alpha \upharpoonright m) = \infty$ が分かる． □

定義 44 ($\mathcal{M}$ ランダム性)**.** $\mathcal{M}$ をマルチンゲールの集合とする．無限二進列が $\mathcal{M}$ ランダムであるとは, その無限二進列において, どんな $\mathcal{M}$ の元も成功しないことを言う．

定義 45 (計算可能ランダム性)**.** $\mathcal{M}_C$ を計算可能マルチンゲール全体の集合とする．$\mathcal{M}_C$ ランダム性は, 計算可能ランダム性 とも呼ばれる．

演習 46. 計算可能マルチンゲール $M : 2^{<\omega} \to \{r \in \mathbb{R} : r \geq 0\}$ に対して, $\mathbb{Q}$ への強い意味での計算可能関数であるようなマルチンゲール M' が存在して, $\mathrm{Win}(M) = \mathrm{Win}(M')$ が成り立つ．

定義 47 (c.e. マルチンゲール)**.** マルチンゲール M が c.e. であるとは, ある計算可能関数 $M' : \omega \times 2^{<\omega} \to \{r \in \mathbb{R} : r \geq 0\}$ が存在して, 任意の $s \in \omega$ と $\sigma \in 2^{<\omega}$ に対し, $M'(s,\sigma) \leq M'(s+1,\sigma) \leq M(\sigma)$ かつ $\lim_{s\to\infty} M'(s,\sigma) = M(\sigma)$ が成り立つことを言う．このとき, $M'(s,\sigma)$ の代わりに $M_s(\sigma)$ と書く．*c.e.* マルチンゲール全体を $\mathcal{M}_{\mathrm{CE}}$ で表す．

演習 * 48. 計算可能マルチンゲールは *c.e.* マルチンゲールである．

定理 49. 任意の *c.e.* マルチンゲールによる零集合は, ある *Martin-Löf* テストによる零集合によって覆われる．

Proof. M を c.e. マルチンゲールとする．各 $n \in \omega$ に対して, $T_n = [\![\{\sigma \in 2^{<\omega} : M(\sigma) > n]\}]\!]$ と定めれば, 定理 39 より, $\lambda(T_n) \leq n^{-1}M(\emptyset)$ を得る．また, 任意の $\sigma \in 2^{<\omega}$ と $n \in \omega$ に対して, 条件 $M(\sigma) > n$ は, $(\exists s)[M_s(\sigma) > n]$ と同値であり, これは σ と n についての c.e. 関係であるから, $\{T_n\}_{n\in\omega}$ は c.e. 開集合の計算可能列である．よって, $\{T_n\}_{n\in\omega}$ は Martin-Löf テストである． □

定理 50. 任意の *Martin-Löf* テストによる零集合は, ある *c.e.* マルチンゲールによる零集合によって覆われる．

Proof. $\{T_n\}_{n\in\omega}$ を Martin-Löf テストとする．必要であれば適切に部分列を取ることにより, $\{T_n\}_{n\in\omega}$ は, 任意の $n \in \omega$ に対して $\lambda(T_n) \leq 2^{-n}$ を満たすと仮定してよい．$\{T_n\}_{n\in\omega}$ の要素をそれぞれ生成する計算可能反鎖集合の計算可能列 $\{A_n\}_{n\in\omega}$ を取る．任意の $n \in \omega$ と $\sigma \in A_n$ に対して, M_n^σ を, $\tau \succeq \sigma$ なら $M_n^\sigma(\tau) = 1$, $\tau \prec \sigma$ なら $M_n^\sigma(\tau) = 2^{|\tau|-|\sigma|}$, それ以外のときは $M_n^\sigma(\tau) = 0$ と定める．この M_n^σ は, n と σ について一様に計算可能なマルチンゲールである．$M_n^\sigma(\emptyset) = 2^{-|\sigma|}$ より, $\sum_{\sigma\in A_n} M_n^\sigma(\emptyset) = \lambda(T_n) \leq 2^{-n}$ であり, よって,

$$\sum_{n\in\omega}\sum_{\sigma\in A_n} M_n^\sigma(\emptyset) \leq \sum_{n\in\omega} 2^{-n} \leq 2$$

が成り立つ．補題 42 より, M_n^σ たちの総和としてマルチンゲール M をで得られる．M は明らかに c.e. マルチンゲールである．

$\bigcap_{n\in\omega} T_n$ が M による零集合によって覆われていることを見るために, $\alpha \in \bigcap_{n\in\omega} T_n$ を固定する．このとき, 各 $n \in \omega$ に対して, ある $\sigma \in T_n$ が存在して, $\sigma \prec \alpha$ が成り立ち, 従って, 任意の $m \geq |\sigma|$ について $M_n^\sigma(\alpha \upharpoonright m) = 1$ が成り立つ．このことから, $\limsup_{m\to\infty} M(\alpha \upharpoonright m) = \infty$ は明らかであろう． □

系 51. *$\mathcal{M}_{\mathrm{CE}}$ ランダム性と Martin-Löf ランダム性とは一致する．* □

系 52. *Martin-Löf ランダム無限二進列であれば, 計算可能ランダムである．* □

注意 53. 一般に, 逆は成り立たない．すなわち, *Martin-Löf* ランダムではない計算可能ランダム無限二進列が存在する．

定義 54 (Schnorr マルチンゲール)**.** 計算可能マルチンゲール M が <u>*Schnorr* マルチンゲール</u>であるとは, ある計算可能な正実数の計算可能な上昇列 $\{r_n\}_{n\in\omega}$ が存在して, $n \mapsto \lambda(\{\alpha \in 2^\omega : (\exists m)[M(\alpha \upharpoonright m) > r_n]\})$ が ω から $\mathbb{R}$ への計算可能関数であることを言う．*Schnorr* マルチンゲール全体を $\underline{\mathcal{M}_{\mathrm{S}}}$ で表す．

定理 55. *任意の Schnorr マルチンゲールによる零集合は, ある Schnorr テストによる零集合によって覆われる．*

Proof. 証明は定理 49 とほとんど同じである．Schnorr マルチンゲール M を固定し, 定義における計算可能な正実数の計算可能な上昇列 $\{r_n\}_{n\in\omega}$ を取る．任意の $n \in \omega$ に対して, $T_n = [\![\{\sigma \in 2^{<\omega} : M(\sigma) > r_n\}]\!]$ と定めれば, 定理 49 と同様にして, $\{T_n\}_{n\in\omega}$ は Martin-Löf テストであることが分かる．さらに, $\{r_n\}_{n\in\omega}$ の取り方から, $\lambda(T_n)$ が n について一様に計算可能であることも分かる．よって, $\{T_n\}_{n\in\omega}$ は Schnorr テストである． □

演習 * **56.** $\{T_n\}_{n\in\omega}$ は *Schnorr* テストで, 任意の $n \in \omega$ に対し $\lambda(T_n) < 2^{-n-1}$ を満たすとする．このとき, 任意の $n \in \omega$ と長さ n の有限二進列 σ に対して, $T_n \cap [\![\sigma]\!] \subset T_n^\sigma \subset [\![\sigma]\!]$ かつ $\lambda(T_n^\sigma) = 2^{-n-1}$ を満たす n と σ について一様な *c.e.* 開集合 T_n^σ が存在し, $(\sigma, \tau, n) \mapsto \lambda(T_n^\sigma \cap [\![\tau]\!])$ が $\mathbb{Q}$ への強い意味での計算可能関数となる．

定理 57. 任意の *Schnorr* テストによる零集合は, ある *Schnorr* マルチンゲールによる零集合によって覆われる．

Proof. $\{T_n\}_{n\in\omega}$ を Schnorr テストとする．必要ならば適切に部分列を取ることで, 各 $n \in \omega$ に対して $\lambda(T_n) < 2^{-n-1}$ が成り立つと仮定してよい．演習 56 により, 任意の $n \in \omega$ と長さ n の有限二進列 σ について一様な c.e. 開集合 T_n^σ が得られる．各 $n \in \omega$ と長さ n の有限二進列 σ に対して, マルチンゲール M_n^σ を, 任意の $\tau \in 2^{<\omega}$ に対して, $M_n^\sigma(\tau) = \lambda(T_n^\sigma \cap [\![\tau]\!])2^{|\tau|+1}$ で定める．T_n^σ たちは演習 56 を満たすものとして取ったので, $(\sigma, \tau, n) \mapsto M_n^\sigma(\tau)$ は $\mathbb{Q}$ への強い意味での計算可能関数である．また, $M_n^\sigma(\sigma) = \lambda(T_n^\sigma)2^{|\sigma|+1} = 2^{-n-1}2^{n+1} = 1$ である．さらに, 任意の $\tau \in 2^{<\omega}$ について $M_n^\sigma(\tau) \leq 2^{-|\tau|}2^{|\tau|+1} = 2$ が成り立つ．各 $n \in \omega$ と長さ n の有限二進列 σ に対して, T_n^σ を生成する n と σ について一様な計算可能反鎖集合 $A_n^\sigma \subset 2^{<\omega}$ を取る．M_n^σ の定め方から, $\tau \in A_n$ ならば $M_n^\sigma(\tau) = 2^{-|\tau|}2^{|\tau|+1} = 2$ である．

さて, M を次のように再帰的に定めよう．まず, $M(\emptyset) = 1$ と定める．空列でない $\sigma \in 2^{<\omega}$ に対しては, まず, σ を,

$$\sigma = \sigma_0\sigma_1\cdots\sigma_k \text{ かつ } (\forall i < k)[\sigma_i \in A^{\sigma_0\cdots\sigma_{i-1}}_{|\sigma_0\cdots\sigma_{i-1}|}] \text{ かつ } (\forall \tau \prec \sigma_k)[\tau \notin A^{\sigma_0\cdots\sigma_{k-1}}_{|\sigma_0\cdots\sigma_{k-1}|}] \quad (3)$$

を満たす有限個の有限二進列 $\{\sigma_i\}_{i\leq k}$ に分解する．今, 帰納法の仮定から $M(\sigma_0\cdots\sigma_{k-1})$ までは, 値が定まっているとしてよい．$M(\sigma)$ を

$$M(\sigma) = M(\sigma_0\cdots\sigma_{k-1})M^{\sigma_0\cdots\sigma_{k-1}}_{|\sigma_0\cdots\sigma_{k-1}|}(\sigma) = 2^k M^{\sigma_0\cdots\sigma_{k-1}}_{|\sigma_0\cdots\sigma_{k-1}|}(\sigma)$$

と定める．

上のように定めた M はマルチンゲールで, $\mathbb{Q}$ に値を持つ強い意味での計算可能な関数となっている．これが Schnorr マルチンゲールであることを示そう．そのためには, $\lambda(\{\alpha \in 2^\omega : (\exists m)[M(\alpha \upharpoonright m) > 2^n]\})$ が n について一様に計算可能であることを示せば十分である．

$B_n \subset 2^{<\omega}$ を, $n = 0$ なら $B_0 = \{\emptyset\}$ で, $n > 0$ なら B_n は, σ を (3) のように分解したとき $k = n - 1$ かつ $\sigma_k \in A^{\sigma_0\cdots\sigma_{k-1}}_{|\sigma_0\cdots\sigma_{k-1}|}$ であるような σ 全体の集合とする．$\{B_n\}_{n\in\omega}$ は計

算可能反鎖集合の計算可能列である.

$$\sum_{\rho\in B_{n+1}} 2^{-|\rho|} = \sum_{\sigma\in B_n}\sum_{\tau\in A^{\sigma}_{|\sigma|}} 2^{-|\sigma\tau|} = \sum_{\sigma\in B_n} 2^{-|\tau|+1}$$

より, 任意の $n\in\omega$ について $\sum_{\sigma\in B_n} 2^{-|\sigma|} = 2^{-n}$ が成り立つ. n について一様に計算される計算可能反鎖集合 $C_n\subset 2^{<\omega}$ を

$$\sigma\in C_n \iff M(\sigma) > 2^n \text{ かつ } (\forall\tau\prec\sigma)[M(\tau)\le 2^n]$$

と定める. $[\![C_n]\!] = \{\alpha\in 2^\omega : (\exists m)[M(\alpha\restriction m) > 2^m]\}$ となっていることに注意しよう. 任意の $\sigma\in C_n$ に対し,

$$(\exists\tau\prec\sigma)[\tau\in B_n] \text{ かつ } (\forall\tau\prec\sigma)[\tau\notin B_{n+1}]$$

が成り立つ. 任意の $a\in\omega$ に対して, $\lambda([\![B_n\setminus B_{n,s}]\!])\le a^{-1}$ を満たすような s は n と a について一様に見つけることができる. よって, 任意の $\sigma\in B_n$ と任意の $a\in\omega$ に対して, $\lambda([\![C^\sigma_n\setminus D^\sigma_{n,a}]\!])\le a^{-1}$ を満たす有限集合 $D^\sigma_{n,a}\subset C^\sigma_n$ が n,σ,a について一様に計算できればよい. ただし, $C^\sigma_n = \{\tau\in C_n : \sigma\preceq\tau\}$ とする.

このことを見るために, $n,a\in\omega$ と $\sigma\in B_n$ を固定する. $f^\sigma_n : \{\rho\in B_{n+1} : \sigma\preceq\rho\}\to C^\sigma_n$ を $f^\sigma_n(\rho)\preceq\rho$ を満たす関数とする. これは σ と n について一様に計算可能な計算可能関数である. $\tau\in C^\sigma_n$ ならば,

$$2^n < M(\tau) = 2^n M^\sigma_{|\sigma|}(\tau) = 2^n\lambda(T^\sigma_{|\sigma|}\cap[\![\tau]\!])2^{|\tau|+1} = 2^n\lambda([\![f^{-1}(\tau)]\!])2^{|\tau|+1}$$

であるから, 両辺を $2^{n+|\sigma|}$ で割って, $2^{-|\tau|} < 2\lambda([\![f^{-1}(\tau)]\!])$ が得られる. まず, $\sum_{\tau\in B_{n+1}\setminus B_{n+1,s}} 2^{-|\tau|}\le 2a^{-1}$ を満たす自然数 s を計算する. $D^\sigma_{n,a} = f(B_{n+1,s})$ と定めよう. この集合 $D^\sigma_{n,a}$ は n,a,σ について一様に計算可能であり, $D^\sigma_{n,a}\subset C^\sigma_n$ が成り立つ. 任意の $\tau\in C^\sigma_n\setminus D^\sigma_{n,a}$ について $f^{-1}(\tau)\subset B_{n+1}\setminus B_{n+1,s}$ が成り立っているので,

$$\sum_{\tau\in C^\sigma_n\setminus D^\sigma_{n,a}} 2^{-|\tau|} < 2\sum_{\tau\in C^\sigma_n\setminus D^\sigma_{n,a}}\lambda([\![f^{-1}(\tau)]\!])\le 2\lambda([\![B_{n+1}\setminus B_{n+1,s}]\!])\le a^{-1}$$

を得る. 最左辺は $\lambda([\![C^\sigma_n\setminus D^\sigma_{n,a}]\!])$ に等しいから, $\lambda([\![C^\sigma_n\setminus D^\sigma_{n,a}]\!])\le a^{-1}$ が得られた. □

系 58. *$\mathcal{M}_{\mathrm{S}}$ ランダム性と Schnorr ランダム性とは一致する.* □

系 59. *計算可能ランダム無限二進列であれば, Schnorr ランダムである.* □

注意 60. 一般に, 逆は成り立たない. すなわち, 計算可能ランダムではない *Schnorr* ランダム無限二進列が存在する.

演習 61. *c.e.* マルチンゲール M で, ある計算可能な正実数の上昇列 $\{r_n\}_{n\in\omega}$ が存在し, 任意の実数 $n \in \omega$ に対し, $\lambda\{\alpha \in 2^\omega : (\exists n)[M(\alpha \upharpoonright n) \geq r_n]\} = r_n^{-1}M(\emptyset)$ を満たす M 全体の集合を $\mathcal{M}'_{\mathrm{S}}$ とおく. このとき, $\mathcal{M}'_{\mathrm{S}}$ ランダムと *Schnorr* ランダムとは一致する.

定義 62 (万能 $\mathcal{M}$ マルチンゲール)**.** $\mathcal{M}$ をマルチンゲールの集合とする. $\mathcal{M}$ の要素が <u>万能 $\mathcal{M}$ マルチンゲール</u> であるとは, そのマルチンゲールで成功しなければ, $\mathcal{M}$ ランダムであることを言う.

定理 63. 万能 *c.e.* マルチンゲールは存在する. □

補題 64. どんな計算可能な無限二進列も $\mathcal{M}_{\mathrm{S}}$ ランダムではない.

Proof. α を計算可能な無限二進列とする. $\sigma \in 2^{<\omega}$ に対して, $M(\sigma)$ の値を, $\sigma \prec \alpha$ なら $2^{|\sigma|}$, それ以外なら 0 と定める. M は Schnorr マルチンゲールである. □

補題 65. 任意の計算可能マルチンゲール M に対し, $\alpha \notin \mathrm{Win}(M)$ を満たす計算可能無限二進列 α が存在する.

Proof. M を計算可能マルチンゲールとする. $M(\sigma k) < M(\emptyset) + 1$ は, $\sigma \in 2^{<\omega}$ と $k \in \{0,1\}$ について c.e. 関係である. よって, 各 $\sigma \in 2^{<\omega}$ に対して, この c.e. 関係を満たす $k \in \{0,1\}$ があればそのような k を値とする計算可能部分関数 f が存在する. M はマルチンゲールだから, $M(\sigma) < M(\emptyset) + 1$ ならば $M(\sigma k) < M(\emptyset) + 1$ を満たす $k \in \{0,1\}$ が存在する. よって, $\alpha_n = f(\alpha \upharpoonright n)$ で定めれば, α は計算可能な無限二進列であり, かつ, $\alpha \notin \mathrm{Win}(M)$ である. □

定理 66 (万能 Schnorr テスト等の非存在)**.** 万能 *Schnorr* テスト, 万能 $\mathcal{K}_{\mathrm{S}}$ 複雑性, 万能 *Schnorr* マルチンゲールは存在しない. □

定理 67 (万能計算可能マルチンゲールの非存在)**.** 万能計算可能マルチンゲールは存在しない. □